Mittelpunktbestimmung von PLZ-Regionen

Technische Beschreibung der „Lat-Lon-Liste“ von Geodaten-Deutschland.de

Stand: 6. Februar 2016

1 Algorithmus „Mittelpunkt-Bestimmung“

Gesucht ist für zwei oder mehrere Punkte auf der Erdoberfläche (in unserem Fall, die Fläche einer Postleitzahlen-Region) der Mittelpunkt.

Wir definieren diesen als **geografischen Schwerpunkt** (Synonyme: centroid, center of gravity, center of mass).

Algorithmus. Gegeben sei die Menge P von Koordinatenpaaren mit Längengrad (engl. longitude) und Breitengrad (engl. latitude)

$$P = \{(\mathsf{lat}_1, \mathsf{lon}_1), (\mathsf{lat}_2, \mathsf{lon}_2), \ldots, (\mathsf{lat}_n, \mathsf{lon}_n)\}$$

Für alle Punkte $(\mathsf{lat}_i, \mathsf{lon}_i)$ aus P, $i = 1, \ldots, n$. Rechne Gradmaß in Bogenmaß um

$$\begin{aligned} \mathsf{lat}_i &= \mathsf{lat}_i \cdot \frac{\pi}{180} \\ \mathsf{lon}_i &= \mathsf{lon}_i \cdot \frac{\pi}{180} \end{aligned}$$

und wandle die Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten um (Gleichungen (10) - (12); setze hierbei $r = 1$)

$$\begin{aligned} x_i &= \cos(\mathsf{lat}_i)\cos(\mathsf{lon}_i) \\ y_i &= \cos(\mathsf{lat}_i)\sin(\mathsf{lon}_i) \\ z_i &= \sin(\mathsf{lat}_i) \end{aligned}$$

Bilde den Mittelwert

$$x = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \qquad y = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \qquad z = \frac{z_1 + \cdots + z_n}{n}$$

Wandle nun die kartesischen Koordinaten (x, y, z) zurück in Kugelkoordinaten bzw. Längen- und Breitengrad:

$$\begin{aligned} \mathsf{lat} &= \mathsf{atan2}(z, \sqrt{x^2 + y^2}) \\ \mathsf{lon} &= \mathsf{atan2}(y, x) \end{aligned}$$

und rechne schließlich Bogenmaß in Gradmaß um - fertig!

$$\begin{aligned} \mathsf{lat} &= \mathsf{lat} \cdot \frac{180}{\pi} \\ \mathsf{lon} &= \mathsf{lon} \cdot \frac{180}{\pi} \end{aligned}$$

$\square$

2 Mathematischer Hintergrund

In diesem Kapitel wollen wir den mathematischen Hintergrund für den eingangs beschriebenen Algorithmus liefern.

2.1 Trigonometrische Funktionen

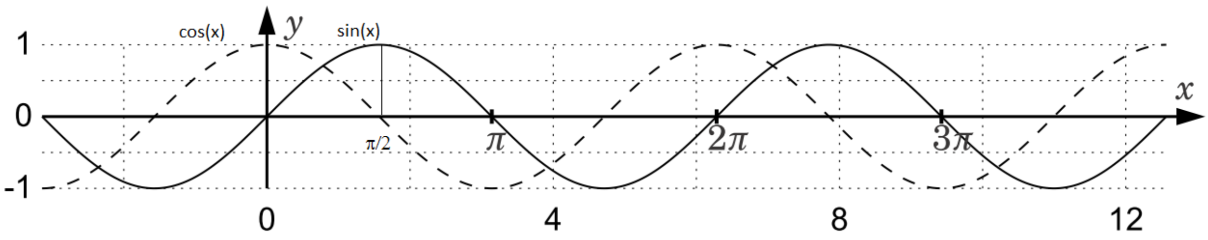

Abbildung 1: Graph für Sinus und Cosinus

Direkt aus der Abbildung lassen sich folgende Gleichungen erkennen:

$$\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} + x) \tag{1}$$

$$\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \tag{2}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \tag{3}$$

2.2 Bogenmaß

Typischweise verwendet man im Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen das Bogenmaß anstelle des Gradmaßes. Aus dem Verhältnis $\frac{\alpha}{360°} = \frac{\alpha'}{2\pi}$ ergibt sich für die Umrechnung Gradmaß in Bogenmaß $\alpha' = \alpha \, \frac{\pi}{180°}$ sowie für die Umrechnung Bogenmaß in Gradmaß $\alpha = \alpha' \, \frac{180°}{\pi}$.

2.3 Polarkoordinaten

Auch genannt: Polarkoodinaten im Raum, Räumliche Polarkoordinaten, Kugelkoordinaten, spherical coordinates

Für kugelsymmetrische Probleme eignet sich besonders ein Koordinatensystem mit Kugelkoordinaten.

Die Koordinaten eines Punkts P sind gegeben durch den Abstand r zum Ursprung, den Winkel ϑ zwischen der z-Achse und r sowie den Winkel φ zwischen der x-Achse und der Projektion von r auf die x-y-Ebene.

Mit der Definition $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ sowie $\vartheta \in [0, \pi]$ lassen sich genau alle Punkte des Raumes bestimmen.

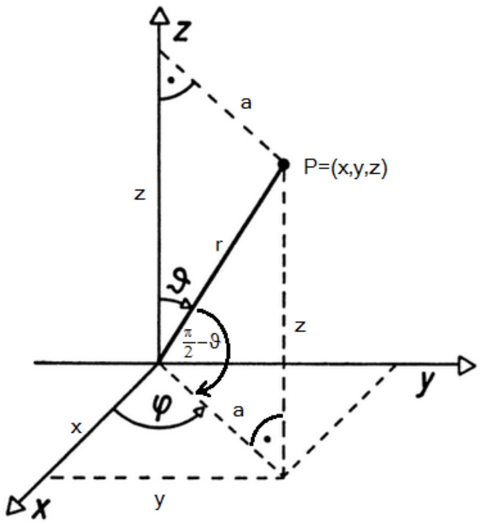

Abbildung 2: Das Kugelkoordinatensystem

Es werden die beiden rechtwinkligen Dreiecke mit den Winkeln ϑ bzw. φ betrachtet:

$$\cos(\vartheta) = \frac{z}{r} \Rightarrow \quad z = r\cos(\vartheta) \tag{4}$$
$$\sin(\vartheta) = \frac{a}{r} \Rightarrow \quad a = r\sin(\vartheta) \tag{5}$$
$$\cos(\varphi) = \frac{x}{a} \Rightarrow \quad x = a\cos(\varphi) \tag{6}$$
$$\sin(\varphi) = \frac{y}{a} \Rightarrow \quad y = a\sin(\varphi) \tag{7}$$

Setze nun a aus Gleichung (6) in Gleichungen (7) und (8) ein und erhalte

$$x = r\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \tag{8}$$
$$y = r\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \tag{9}$$

(4), (8) und (9) beschreiben die **Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten**.
Nun können wir in diese Formeln aber noch nicht Längengrad ($=\vartheta$) und Breitengrad ($=\varphi$) einsetzen, was an der Definition des Längengrads liegt:
Der Längengrad ist definiert als der Winkel ϑ' zwischen der Äquatorialebene (hier: $x-y$-Ebene) und dem Ortsvektor r.
Wir müssen also $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \vartheta'$ setzen, und erhalten

$$x = r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta'\right)\cos(\varphi) \ \ =^{(2)}\ r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta'\right)\right)\cos(\varphi) \ = \ r\cos(\vartheta')\cos(\varphi) \tag{10}$$
$$y = r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta'\right)\sin(\varphi) \ \ =^{(2)}\ r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta'\right)\right)\sin(\varphi) \ = \ r\cos(\vartheta')\sin(\varphi) \tag{11}$$
$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta'\right) \ =^{(2)}\ \sin(\vartheta') \tag{12}$$

Die Rückrichtung, also Herleitung der **Kugelkoordinaten aus kartesischen Koordinaten (x,y,z)**, liest man direkt aus Abbildung 2 ab:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{13}$$

$$\tan(\vartheta) = \frac{a}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \ \Rightarrow \vartheta = \mathsf{arctan}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \tag{14}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x} \ \Rightarrow \mathsf{lat} := \varphi = \mathsf{arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{15}$$

Nun sind wir nicht an ϑ sondern an lon $\stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\pi}{2} - \vartheta$ interessiert. Für diesen Winkel lesen wir aus Abbildung 2 ab

$$\tan(\mathsf{lon}) = \frac{z}{a} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ \Rightarrow \mathsf{lon} = \mathsf{arctan}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \tag{16}$$

□

3 Implementierung in PHP

PHP-Code:

```
# Initialisierung der Variablen
$x = 0;
$y = 0;
$z = 0;

$lat = array();
$lon = array();

# HIER: Fülle Arrays mit Punkten, bspl. aus einer MySQL-Tabelle

while ($row = mysql_fetch_object($result)) {

  $lat[] = $row->lat;
  $lon[] = $row->lon;
}

# Anzahl Punkte
$n = mysql_num_rows($result);


# Durchlaufe diese nun; wandle Längen- und Breitengrad in kartesische Koordinaten um

for ($i=0; $i<$n; $i++) {

  $x += cos($lat[$i] * (pi()/180)) * cos($lon[$i] * (pi()/180));
  $y += cos($lat[$i] * (pi()/180)) * sin($lon[$i] * (pi()/180));
  $z += sin($lat[$i] * (pi()/180));
}

# und berechne das arithmetische Mittel
$x = $x / $n;
$y = $y / $n;
$z = $z / $n;

# Wandel die kartesischen Koordinaten zurück in Kugelkoordinaten (bzw. Längen- und Breitengrad)
# Erhalte am Ende den geografischen Schwerpunkt (center_lat, center_lon)

$center_lat = 180/pi() * atan2($z,  sqrt($x * $x + $y * $y));
$center_lon = 180/pi() * atan2($y,$x);
```

Wir betrachten als Beispiel PLZ 80333, München Altstadt bzw. Maxvorstadt, und erhalten
Mittelpunkt (lat,lon) = (48.14360144812, 11.569609057445)

Abbildung 3: Mittelpunkt des PLZ-Gebiets 80333

KML-Datei zur Visualisierung der Polygone und des Mittelpunkts:

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<kml xmlns="http://www.opengis.net/kml/2.2">
<Document>
  <Placemark>
    <name>PLZ 80333</name>
    <Polygon>
      <extrude>1</extrude>
      <outerBoundaryIs>
        <LinearRing>
          <coordinates>
              11.577286,48.138795,0
              11.577383,48.138862,0
              11.577432,48.138920,0
              <!-- lon, lat, altitude -->
              11.577277,48.138872,0
              11.577286,48.138795,0
          </coordinates>
        </LinearRing>
      </outerBoundaryIs>
    </Polygon>
  </Placemark>
  <Placemark>
    <Point>
      <coordinates>
        11.56960906,48.1436014,0
      </coordinates>
    </Point>
  </Placemark>
</Document>
</kml>
```